Анотація до конкурсної роботи
Олексія Теплінського
"Посилена жорсткість для дифеоморфізмів кола з особливостями"

Теорія жорсткості в загальному розумінні займається з'ясуванням умов, за яких топологічна еквівалентність двох динамічних систем тягне за собою їхню гладку еквівалентність, і визначенням ступеня гладкості заміни координат, що здійснює відповідне спряження двох систем.

Зауважимо, що для вужчого класу подібних результатів поширеним є термін "теореми приведення"; він застосовний у випадку, коли одна з динамічних систем задається лінійним відображенням, а друга — нелінійна — до неї приводиться. В. І. Арнольдом було доведено (в рамках теорії КАМ) локальну теорему приведення для дифеоморфізмів кола [1], яка стверджує наступне: якщо аналітичний дифеоморфізм кола є близьким до лінійного повороту цього кола на відповідне число обертання ρ, і це число обертання є діофантовим (кажучи спрощенно, це означає, що воно є ірраціональним, і раціональні числа наближують його не надто добре), то даний дифеоморфізм приводиться до даного повороту аналітичною заміною координат. Термін "локальна" тут вказує на вимогу близькості двох динамічних систем, еквівалентність між якими встановлюється. Згодом результат Арнольда був поширений Ю. Мозером з аналітичного на гладкий випадок.

Теорія жорсткості для дифеоморфізмів кола носить назву "теорія Ермана" на честь французького математика Мішеля Ермана, який довів першу глобальну теорему приведення, позбувшися зайвої умови близькості заданого дифеоморфізму до відповідного лінійного повороту [2]. Результат Ермана покращували його наступники, зокрема Ж.-К. Йоккос, К. М. Ханін і Я. Г. Синай, І. Катцнельсон і Д. Орнштейн. Важливим є той факт, що для завідомої наявності гладкого спряження дифеоморфізмів кола умова діофантовості числа обертання є обов'язковою.

Наша конкурсна робота є присвяченою дослідженню динамічних систем на колі, що задані так званими дифеоморфізмами з особливостями, тобто такими гомеоморфізмами кола, які є гладкими всюди окрім деяких ізольованих точок, в яких наявна певна особливість похідної. На конкурс подаються статті [3, 4, 5], перша з яких містить докладний огляд проблематики та виклад головних ідей, що використовуються в дослідженні, друга і третя містять повні доведення тверджень, які анонсовано в першій. (Доведення Теореми 2 з [3] буде опубліковане окремою роботою [6].) Моєму співавторові Костянтину Ханіну належить постановка задач і окремі ідеї в доведеннях.

Ми розглядаємо два типи особливостей: критична точка — в якій похідна обертається на нуль (а похідна зворотного відображення — відповідно, на нескінченність) і точка зламу — в якій похідна зліва не дорівнює похідній справа. Очевидно, що при гладкій заміні координат жодна особливість похідної не можуть зникнути, тому перше, що необхідно зауважити, — це відсутність "зразкового" відображення, до якого природньо було б гладким чином приводити заданий дифеоморфізм з особливістю (на відміну від випадку теорії Ермана, де таким "зразковим" відображенням є лінійний поворот).

Система інваріантів, що описує класи гладкої еквівалентності дифеоморфізмів кола з особливостями, містить, окрім числа обертання, порядки критичних точок і розміри зламів. Але, як виявилося, в певному сенсі наявність особливостей парадоксальним чином спрощує ситуацію, знімаючи вимогу діофантовості щодо числа обертання. Це і є той ефект, який ми розуміємо під посиленою жорсткістю: два дифеоморфізми кола з особливостями є C^1-гладко спряженими між собою за умови лише співпадіння ірраціональних чисел обертання і числових характеристик особливостей (у випадку декількох особливостей необхідно ще вимагати співпадіння числових значень інваріантних мір відповідних дуг кола між особливими точками [3]).

Для доведення посиленої жорсткості ми використовуємо так званий ренорм-груповий підхід, вперше застосований М. Фейгенбаумом [7] у дослідженні універсальних властивостей біфуркацій подвоєння періоду для унімодальних відображень відрізка, і який полягає в розгляді замість вихідного відображення послідовності його ренормалізацій. Коротко кажучи, ренормалізація — це відображення першого повернення траєкторії у певний малий регіон фазового простору (в нашому випадку це малий окіл особливої точки, кінці якого визначаються за динамікою її траєкторії), перенормоване на макроскопічний рівень. Ідея ренормалізаційного підходу полягає в тому, що динаміка поблизу особливої точки є масштабно інваріантною, тобто ренормалізації двох відображень з одного класу гладкої еквівалентності асимптотично зближуються, а з різних класів — поводяться незалежно. З іншого боку, чергову ренормалізацію можна порахувати, виходячи з попередньої, отже, всю послідовність ренормалізацій можна розглядати в цілому як траєкторію певного оператора, який діє в належним чином означеному функціональному просторі.

Мабуть, найбільш важливим досягненням нашої роботи є доведення так званої умовної теореми (див. підрозділ 2.2 в [4]), яка C^1-гладку еквівалентність двох дифеоморфізмів кола з особливостями виводить з експоненційного зближення їхніх ренормалізацій в нормі C^2 та певних геометричних умов (які справджуються саме внаслідок наявності особливостей). Сила цієї теореми полягає, зокрема, в тому, що вона дозволяє "обробляти" ірраціональні числа, які не є діофантовими, а отже, є ключем до феномену посиленої жорсткості для дифеоморфізмів кола з особливостями.

Концептуальне розуміння динаміки ренормалізаційного оператора пов'язане з іменем О. Ланфорда [8] та однойменною Програмою (досліджень). Її мета полягає зокрема у виявленні в цього оператора певних гіперболічних властивостей, а саме: наявності єдиного нестійкого напрямку (що відповідає зміні числа обертання) і трансверсального стійкого многовиду корозмірності 1. Для критичних аналітичних відображень кола Програму Ланфорда було виконано М. Ямпольським [9], що дало нам змогу завдяки згаданій вище умовній теоремі вивести наступний фундаметальний результат [4]: будь-які два аналітичні гомеоморфізми кола з одним і тим самим ірраціональним числом обертання, кожен з який має на колі єдину критичну точку, причому порядки цих критичних точок однакові, є C^1-гладко спряженими між собою.

У випадку дифеоморфізмів кола зі зламом аналог Програми Ланфорда виконано в [5]. Виявлено двовимірну симетричну гіперболічну структуру типу підкови Смейла [10] і вказано метрику, в якій ренормалізаційний оператор є рівномірно гіперболічним.

Список посилань

1. В. И. Арнольд. Малые знаменатели I, Об отображениях окружности на себя. *Изв. АН СССР*, **25**, №1, 1961, С. 21–86.

2. M.-R. Herman. Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotations. *IHES Publ. Math.* (49), 1979, pp. 5–233.

3. А. Ю. Теплинский, К. М. Ханин. Жёсткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями. *Успехи математических наук*, **59**, №2, 2004, С. 137–160.

4. K. Khanin and A. Teplinsky. Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities. *Invent. Math.*, **169**, no. 1 (July), 2007, pp. 193–218.

5. О. Ю. Теплінський. Гіперболічна підкова для дифеоморфізмів кола зі зламом. *Нелінійні Коливання*, **11**, №1, 2008, С. 112–127.

6. K. Khanin and A. Teplinsky. Renormalization horseshoe and rigidity theory for circle diffeomorphisms with breaks (to appear).

7. M. J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, **19**, no. 1, 1978, pp. 25–52.

8. O. E. Lanford. Renormalization group methods for critical circle mapping. Nonlinear evolution and chaotic phenomena, *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B: Phys.*, **176**, Plenum, New-York, 1988, pp. 25–36.

9. M. Yampolsky. The attractor of renormalization and rigidity of towers of critical circle maps. *Comm. Math. Phys.*, **218**, no. 3, 2001, pp. 537–568.

10. S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Am. Math. Soc.*, **73**, 1967, pp. 747–817.